

Section 2.2

$$7. \quad \text{a.} \quad [A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 12 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{6}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \Rightarrow [I \mid A^{-1}] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}_1 \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}_1 \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}_1 \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}_2 \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}_2 \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}_2 \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}_3 \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}_3 \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}_3 \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}_4 \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}_4 \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}_4 \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b.} \quad [A \mid \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \vec{b}_3 \quad \vec{b}_4] = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 12 & 3 & -5 & 6 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -9 & 11 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

$$37. \quad CA = I_2 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I tried a lot of matrices, but eventually figured out that $1 + 1 - 1 = 1$ and $2 + 3 - 5 = 0$ and $-1 + 1 = 0$ and $-2 + 3 = 1$.

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supplementary Problems

7.

$$AX = B \Rightarrow [A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 8 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 9 & 10 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow T(1, 0) = \frac{-1}{2}T(1, 3) + \frac{3}{2}T(1, 1) = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow T(0, 1) = \frac{1}{2}T(1, 3) + \frac{-1}{2}T(1, 1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \checkmark \text{ and } \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Section 3.1

1.

$$\text{First row: } |1.| = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 3(-3 - 10) + 4(10 - 0) = 1$$

$$\text{Second column: } |1.| = -3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -3(0 + 3) + 5(8 - 6) = -9 + 10 = 1$$

7.

$$|7.| = 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 0 = 4(15 - 14) - 3(18 - 18) = 4$$

12.

$$|12.| = 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -8 & 4 & -3 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 = 4 \times \left(-1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 0 + 0 \right) = 4 \times (-1(-9)) = 4 \times 9 = 36$$

14.

$$|14.| = 0 - 0 + 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 1 \left(3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 \right) =$$

$$1 \left(3 \left(2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \right) \right) = 1(3(2(2 + 16) - 3(0 - 3) + 2(-12 + 0))) = 9$$